Esercizio 13 (Scritto 11/12/06)

Calcolare il flusso del campo vetoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + z^3\overrightarrow{k}$$

attraverso la superficie sferica $\mathcal{S}$ di centro $(0,0,0)$ e raggio 2

Applichiamo il Teorema della divergenza

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\mathcal{S} = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{F}\, dxdydz$$

dove

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}\,.$$

Si calcola

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + 3z^2$$

Allora:

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\mathcal{S} = 3 \iiint_V z^2\, dxdydz$$

Per simmetria:

$$\iiint_V z^2\,dxdydz = 8\iiint_{V^+} z^2\,dxdydz\,.$$

ove V^+ è l'intersezione di V con il primo ottante.

Passaggio a <u>coordinate sferiche</u>

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta)\sin(\phi) \\ y = \rho\sin(\vartheta)\sin(\phi) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases} \qquad\qquad J(\rho,\vartheta,\phi) = \rho^2\sin(\phi)$$

$$V^+ \;\to\; \widetilde{V}^+ = \{(\rho,\vartheta,\phi):\; 0\le\rho\le 2\,,\; 0\le\vartheta,\phi\le\pi/2\}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\iiint_V z^2\,dxdydz \\
&= 24\iiint_{V^+} z^2\,dxdydz \\
&= 24\iiint_{\widetilde{V}^+} \rho^4\sin(\phi)\cos^2(\phi)d\rho d\vartheta d\phi \\
&= 12\pi\left(\int_0^2 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2(\phi)\sin(\phi)\,d\phi\right) \\
&= 12\pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2\left[-\frac{\cos^3(\phi)}{3}\right]_0^{\pi/2} = 4\pi\frac{32}{5}
\end{aligned}$$